Homework 2

孙锴

5110309061

1. 是的。

∵存在 A到B的满射

∴存在B到A的单射

设A到B的一个单射为，B到A的一个单射为

定义，设集合

断言：存在集合，满足，，，且，。

令，则对于任意，都有，由X的任意性可见，又由此可得，从而有，从而，于是得到。所以令，，，则易见由此得到的满足条件，所以断言成立。

设映射，则是A到B的一个双射。

（请问：本题是否可以不用如上严格的证明，而做如下答案：∵且 ∴，∴存在双射 ？）

1. 设三元组的每一维对应的集合分别为A,B,C，其中A={a0,a1,a2,…}，B={b0,b1,b2,…}，C={c0,c1,c2,…}

则有如下算法（伪代码描述）：

For i:=0 to ∞

For j:=0 to i

For k:=0 to i-j

List (aj, bk, ci-j-k)

1. (a)显然有理数0是有限小数，以下不妨设有理数1>x>0。则存在整数a，b满足x=a/b，不妨设a，b>0且互素。若a/b转化为十进制小数位数有限，则命题成立，因而下设a/b为无限小数。只须证明a/b为无限循环小数。a/b转化为十进制小数的过程可以用如下算法描述（伪代码表示）：

设转换后的小数为0.a1a2a3a4a5…，以下x div y表示x除以y的整数部分。

p:=a

i:=1

While True

ai:=p div b

p:=(p mod b)\*10

i:=i+1

因为(p mod b)\*10的位数不会超过b的位数+1，所以可能的p的取值是有限的。因而必定存在s<t，使得i=s时的p与i=t时的p相同，而ai的值完全由p确定，所以必定有长度为t-s+1的循环节，从而a/b为无限循环小数。

(b)只须对区间[0,1)进行讨论。对于任意在此区间内的数x，若x有限，则设x=0.a1a2a3a4…an，显然x=，为有理数。若x=0.a1a2a3a4…无限循环，设其循环节第一次出现的位置p，且循环节为apap+1ap+2…ap+n，则x=，为有理数。综上，命题成立。

4. 对于任意自然数n，若 n为完全平方数则命题成立，下设n不是完全平方数。假设n的平方根为有理数，则设n的平方根为a/b,其中a，b均为正整数，不失一般性，可设a，b互素，则n=(a/b)2=a2/b2，易见b>1（否则n=a2，为完全平方数，矛盾），又因为a与b互素，所以a2与b2互素，所以a2/b2不是自然数，这与n=a2/b2为自然数矛盾。

5. (a)设a与b为任意两个不相等的有理数，不妨设a<b，则有无理数c=a+π/4\*(b-a)满足a<c<b。

(b)设a与b为任意两个不相等的无理数，不妨设a<b，则根据阿基米德原理，存在正整数n使得1/n<b-a，从而na+1<nb，从而存在整数m使得na<m<nb，从而有a<m/n<n，而m/n为有理数。

6. 是的。因为线与R之间存在双射，即线与R等势，从而任意两条线之间等势，从而它们的基数相同。

7. 因为所有的计算机程序可计算的问题的数量是可数无穷的，设它们是P1,P2,P3,…，可能的输入也是可数无穷的，设它们为I1,I2,I3,…，则可以将每个程序的输出（或“永不终止”状态）对应相应的输入如下列出：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | I1 | I2 | I3 | … |
| P1 | 1 | 3 | 1 | … |
| P2 | 3 | 永不终止 | 5 | … |
| … | … | … | … | … |

则存在问题P\*，若Pi对应Ii会有输出Xi，则P\*对应Ii的输出结果为Xi+1，否则P\*输出1。则易见P\*是不可计算的。但是若假设存在程序C可以判断任意程序在任意输入下是否会终止，则P\*可以通过如下程序计算：

对于输入x，首先找到其编号i（使得Ii=x），然后调用程序C判断Pi在Ii下是否会终止，若会终止，则输出Pi在 Ii下的计算结果+1，否则输出1。

这说明P\*是可计算的，与前面所证P\*不可计算矛盾。所以假设不成立，即不存在程序可以判断任意程序在任意输入下是否会终止。

8. 由对角线法获得的数p不是有理数。

9. 未证明对角线法获得的数p是有理数。而实际上，这样获得的数p不是有理数。

(请问：第8题和第9题有什么区别？我当成同一个题做的)

1. 存在。

映射：x (x,0)

2. 存在。

对于任意，记x=0.a1a2a3a4a5a6……，则有双射：

x (y, z)，其中y=0.a1a3a5a7……，z=0.a2a4a6a8……

3. ，，

因为无理数是不可数的，而有理数可数，所以无理数数量远远大于有理数，因而有理数的影响可以忽略不计，从而有以上答案。